Летняя математическая школа
"**Алгебра и геометрия**"

2 – 7 августа 2025 г., г. Суздаль

ПОСТЕРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Доказательство теоремы Пюизо для некоторого класса алгебраических уравнений

Бузурный М.И.

Исаак Ньютон в письме к Ольденбургу изложил идею алгоритма поиска решения алгебраического уравнения $F(z, w) = 0$ в виде ряда с дробным показателем степени переменной z. Сейчас он носит название метода диаграммы Ньютона. В последствии Виктором Пюизо был доказан тот факт, что получаемые методом диаграммы Ньютона решения сходятся в некоторой окрестности нуля. Этот факт носит название теоремы Пюизо.

Следующим этапом развития интереса к этому вопросу стали работы, использующие техники, эквивалентные разрешению особенностей алгебраических кривых в современной терминологии.

Теорему Пьюизо можно также получить из иных соображений, например, из разложения многочлена $F(z, w)$ в произведение неприводимых многочленов Вейерштрасса относительно переменной z. Рассматривая отдельно каждый неприводимый многочлен, можно построить локальную параметризацию определяемой им ветви кривой. Каждое из формальных решений уравнения $F(z, w) = 0$ совпадает с одной из полученных параметризаций, и тем самым является сходящимся.

Для некоторых классов уравнений доказательство теоремы Пьюизо может быть получено без использования рассмотренных выше конструкций. В настоящей работе приводится один такой класс уравнений, у которых коэффициенты - сходящиеся ряды Пьюизо. Показывается, что все сходящиеся решения можно получить сразу же по диаграмме Ньютона исходного уравнения, и, в частности, опустить промежуточные разрешения особенностей.

Определение 1. *Рядом Пьюизо с одной переменной называется формальное алгебраическое выражение вида*

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^{\frac{n}{m}},$$

где n_0- целое, $m-$натуральное (при $m = 1$ получается ряд Лорана), коэффициенты a_n берутся из некоторого кольца R.

Определение 2. *Диаграммой Ньютона $N(F)$ уравнения (1) называется множество компактных граней неограниченного полиэдра c.h.$(\cup P_\beta)$, где $P_\beta = \{(\beta, s) : s \geq \alpha\}$, c.h.- convex hull (выпуклая оболочка).*

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть уравнение $F(z,w) = 0$ таково, что каждое ребро его диаграммы Ньютона не содержит целых точек, отличных от вершинных. Тогда каждое его решение, получаемое с помощью алгоритма Ньютона, является сходящимся рядом Пьюизо.*

Доказательство теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений.
Отсюда с помощью теоремы о вычетах получается

Теорема 2. *(о логарифмическом вычете) Пусть $G \subset \mathbb{C}-$ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f \in \mathbb{O}(\bar{G})$ имеет в $\bar{G}$ конечное число нулей $a_j \in G$ кратностей μ_j. Тогда для любой $\varphi \in \mathbb{O}(\bar{G})$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \varphi \frac{df}{f} = \sum_j \mu_j \varphi(a_j).$$

Теорема 3. *(А.П. Южаков) Уравнение $\Phi(\zeta, z) = 0$ имеет голоморфное в окрестности $\zeta = 0$ решение (ветвъ) вида*

$$z = z(\zeta) = \sum_{k\geq 2} c_k \zeta^k.$$

Проиллюстрируем на примере, когда теорема 1 быстрее приводит к цели, чем техника разрешения особенностей алгебраических кривых.

Рассмотрим уравнение вида

$$G(z,w) = az^\alpha w^\beta + \sum_{i+j>\alpha+\beta} a_{ij} z^i w^j = 0$$

и удовлетворяющее условиям теоремы 1. Данная функция имеет особую точку $(0,0)$ порядка $\alpha + \beta$. После подстановки $z = u, w = vu$ получим:

$$u^{\alpha+\beta}(av^\beta + \sum_{i+j>d} u^{i+j-(\alpha+\beta)} v^j) = u^{\alpha+\beta} \widetilde{G}(u,v) = 0,$$

откуда видно, что точка $(0,0)$ остаётся особой и для функции $\widetilde{G}(u,v)$. Связано это с тем, что касательный конус в точке $(0,0)$ для кривой $G(z,w)$ имел кратные компоненты (компоненту $z = 0$ кратности α и компоненту $w = 0$ кратности β). По конструкции разрешения необходимо продолжать раздутие особой точки, т.е. требуется как минимум больше одного шага. Вместе с тем, использование теоремы 1 сразу позволяет получить сходящееся решение.

Цилиндричность трехмерных многообразий Фано рода 9 и 10

Вирин Н. А.

Все рассматриваемые многообразия считаем определенными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. *Цилиндром* называется алгебраическое многообразие U, которое изоморфно $Z \times \mathbb{A}^1$, где Z – некоторое квазипроективное многообразие. Многообразие X называется *цилиндрическим,* если оно содержит открытое по Зарискому множество U, являющееся цилиндром. Обзор о цилиндрах в многообразиях Фано можно найти в работе [2].

Интерес к цилиндрическим многообразиям произошел из аффинной геометрии. Пусть многообразие X проективно и $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ – его проективное вложение. В работе [4] рассмотрен следующий естественный вопрос: когда аффинный конус $\operatorname{AffCone}(X) \subset \mathbb{A}^{N+1}$ над X допускает эффективное действие аддитивной группы $\mathbb{G}_a$. [1] Один из возможных критериев имеет следующий вид:

Теорема 0.1 ([5, Corollary 0.4])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – гладкое проективное многообразие с $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Тогда $\operatorname{AffCone}(X)$ допускает эффективное $\mathbb{G}_a$-действие тогда и только тогда, когда X цилиндрично.*

Замечание 0.2. Существует аналогичный критерий для многообразий с произвольной группой Пикара (см. [5, Theorem 0.3]).

Цилиндрическое многообразие унилинейчато, следовательно, его кодаирова размерность отрицательна (см. [6, Corollary IV.1.11]). Поэтому гладкие цилиндрические многообразия с $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) = 1$ являются многообразиями Фано.

Известно, что трехмерные цилиндрические многообразия Фано рациональны (см. [5]). При этом неизвестны примеры гладких рациональных многообразий Фано, которые не являются цилиндрическими.

Напомним, что *родом* трехмерного многообразия Фано с $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$ называется число

$$g := 1 - \frac{K_X^3}{2}.$$

Это число принимает целые значения, $2 \leqslant g \leqslant 12$ и $g \neq 11$.

Пусть X – гладкое трехмерное многообразие Фано рода g с

$$\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X].$$

Тогда про рациональность и цилиндричность таких многообразий известно следующее:

[1] Если аффинный конус $\operatorname{AffCone}(X)$ допускает такое действие и $\dim(X) \geqslant 1$, то группа $\operatorname{Aut}(\operatorname{AffCone}(X))$ автоморфизмов бесконечномерна (см. [1]).

1. Если $g \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, то общее многообразие X не является рациональным и, в частности, не является цилиндрическим. Более точно:
   - Если $g \in \{2, 3, 5, 8\}$, то любое многообразие X не является рациональным.
   - Если $g \in \{4, 6\}$, тогда общее многообразие X не является рациональным.
2. Если $g \in \{7, 9, 10, 12\}$, то любое многообразие X рационально.
3. Если $g = 12$, то любое многообразие X является цилиндрическим (см. [3, Proposition 5.2]).

В классе трехмерных многообразий Фано с $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$ открыт вопрос о цилиндричности многообразий рода 7, 9 и 10. Ранее было известно, что среди трехмерных многообразий Фано с $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$ родов 9 и 10 есть цилиндрические. А именно, в работе [5] доказана следующая теорема:

Теорема 0.3 ([5, Theorem 0.1])**.** *Пусть X – трехмерное многообразие Фано рода $g = 9$ или $g = 10$ с $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$ и особой схемой Гильберта прямых $F_1(X)$. Тогда X цилиндрично. Такие многообразия Фано образуют подмногообразие коразмерности один в соответствующем пространстве модулей.*

Мы утверждаем, что все многообразия Фано рода $g = 9$ или $g = 10$ с $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$ являются цилиндрическими. А именно, доказывается следующая теорема:

Теорема 0.4. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано рода* 9 *или* 10 *с* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$*. Тогда X является цилиндрическим.*

Список литературы

[1] I. Arzhantsev and S. Gaifullin, *The automorphism group of a rigid affine variety*, Math. Nachr., 290 (2017), pp. 662–671.

[2] I. Cheltsov, J. Park, Y. Prokhorov, and M. Zaidenberg, *Cylinders in Fano varieties*, EMS Surv. Math. Sci., 8 (2021), pp. 39–105.

[3] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, and M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, in Affine algebraic geometry: The Russell Festschrift. Outgrow of an international conference, McGill University, Montreal, QC, Canada. June 1–5, 2009, held in honour of Professor Peter Russell on the occasion of his 70th birthday, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011, pp. 123–163.

[4] ——, *$\mathbb{G}_a$-actions on affine cones*, Transform. Groups, 18 (2013), pp. 1137–1153.

[5] ——, *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions*, Osaka J. Math., 51 (2014), pp. 1093–1112.

[6] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, vol. 32 of Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Операторы Роты-Бакстера на йордановой алгебре $H_4^{(+)}$

Я. Гостюхин

Как известно, обобщением понятия дифференцирования на произвольной алгебре A является линейный оператор d, удовлетворяющий тождеству Лейбница $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ для всех $x, y \in A$. Можно ли ввести подобный оператор, но для понятия интегрирования? Ответом на этот вопрос является понятие оператора Роты-Бакстера на произвольной алгебре.

Определение 1. Пусть A — алгебра над полем $\Bbbk$. Линейный оператор R называется оператором Роты-Бакстера (РБ-оператор) веса $\lambda \in \Bbbk$, если он удовлетворяет соотношению

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy)$$

для всех $x, y \in A$.

Нетрудно заметитить, что оператор интегрирования является РБ-оператором веса $\lambda = 0$. РБ-операторы имеют множество приложений в различных областях математики, таких как теория чисел, математическая физика и теория операдов. Также была выявлена глубокая связь с классическим уравнением Янга-Бакстера.

Одним из направлений для изучения РБ-операторов является их описание на конкретной алгебре. Для этого рассмотрим такую задачу: пусть задана ассоциативная алгебру A над полем $char(\Bbbk) \neq 2$, по которой можно построить алгебры $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$, заменив операцию умножения на $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ и $[a, b] = ab - ba$ соответственно. Алгебра $A^{(+)}$ будет является йордановой алгеброй, алгебра $A^{(-)}$ — лиевой. Нетрудно проверить, что если R — РБ-оператор на ассоциативной алгебре, то R также РБ-оператор на алгебрах $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$. Возникает вопрос — какие РБ-операторы на присоедененных алгебрах не приходят из ассоциативной алгебры. Для исследования этого вопроса я рассмотрел четырехмерную алгебру Хопфа H_4 над полем характеристики $\neq 2$. Как алгебра она порождается элементами $1, g, x, gx$ с таблицей умножения:

$$x^2 = 0, \quad g^2 = 1, \quad gx = -xg.$$

Далее строим алгебра $H_4^{(+)}$ по вышеуказанной схеме. Для описания РБ-операторов нам понадобится описать $Aut(H_4^{(+)})$, дать список всех подалгебры с точностью до действия автоморфизмов. После этого пользуемся утверждением о том, что ядро любого РБ-оператора ненулевого веса и образ любого РБ-оператора нулевого веса является подалгебрами. В моей работе я исследовал решения системы квадрик над произвольным полем характеристики $\neq 2$. В общем случае можно воспользоваться базисами Гребнера-Ширшова, однако я делал это вручную. Представим основной результат.

Теорема 2. Все РБ-операторы ненулевого веса на алгебре $H_4^{(+)}$ с точностью до сопряжения автоморфизмами исчерпывается списком:

(1) $R(1) = R(x) = R(gx) = 0, \quad R(g) = \pm 1 - g;$

(2) $R(1) = R(g) = R(x) = 0, \quad R(gx) = p_1(1 - g) - gx;$

(3) $R(x) = R(gx) = 0, \quad R(1) = R(g) = -1;$

(4) $R(x) = R(gx) = 0, \quad R(1) = R(g) = \pm\frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}g;$

(5) $R(x) = R(gx) = 0, \quad R(1) = -1, \quad R(g) = 1;$

(6) $R(x) = R(gx) = 0, \quad R(1) = -1, \quad R(g) = -g;$

(7) $R(x)=R(gx)=0, \quad R(1)=-\frac{3}{2}1+\mp\frac{1}{2}g, \quad R(g)=\pm\frac{1}{2}1-\frac{1}{2}g$

(8) $R(1)=R(g)=0, \quad R(x)=p_1(1\pm g)-x, \quad R(gx)=p_2(1\pm g)-gx;$

(9) $R(x)=0, \quad R(1)=R(g)=-1, \quad R(gx)=p_1(1-g)-gx;$

(10) $R(1)=R(x)=0, \quad R(g)=\pm 1-g+p_1x, \quad R(gx)=p_2x-gx;$

(11) $R(1)=0, \quad R(g)=\pm 1-g, \quad R(x)=-x, \quad R(gx)=-gx;$

(12) $R(x)=0, \quad R(1)=-\frac{3}{2}1\pm\frac{1}{2}g\mp(p_1+2p_2p_3)x\pm p_2gx,$
$R(g)=\mp\frac{1}{2}1-\frac{1}{2}g+p_1x+p_2gx, \quad R(gx)=p_3x-gx;$

(13) $R(1)=R(g)=-1, \quad R(x)=-x, \quad R(gx)=-gx;$

(14) $R(1)=R(g)=\pm\frac{1}{2}1-\frac{1}{2}g, \quad R(x)=-x, \quad R(gx)=-gx;$

(15) $R(1)=-1, \quad R(g)=-g, \quad R(x)=-x, \quad R(gx)=-gx;$

Теорема 3. Все РБ-операторы нулевого веса на $H_4^{(+)}$ с точностью до спoряжения автоморфизмами описываются списком:

(1) $R(x)=0, \quad R(1)=p_1x, \quad R(g)=p_2x, \quad R(gx)=p_3x;$

(2) $R(1)=R(g)=0, \quad R(x)=p_1(1-g), \quad R(gx)=p_2(1-g);$

(3) $R(x)=R(gx)=0, \quad R(1)=p_1x+p_2gx, \quad R(g)=p_3x+p_4gx;$

(4) $R(1)=p_1x-p_1p_2p_3^{-1}gx, \quad R(g)=p_4x-p_4p_2p_3^{-1}gx,$
$R(x)=p_2x-p_2^2p_3^{-1}gx, \quad R(gx)=p_3x-p_2gx;$

(5) $R(1)=R(gx)=0, \quad R(g)=-p_1(1-g)+x, \quad R(x)=p_1^2(1-g)+p_1x;$

(6) $R(1)=0, \quad R(g)=-p_1(1-g)+x, \quad R(x)=p_1^2(1-g)+p_1x,$
$R(gx)=p_2^2(1-g)-p_1x.$

Аналог теории Морса в алгебраической геометрии

Роман Елисеев

Часть I: Классическая теория Морса

Основная идея теории Морса заключается в анализе топологии гладкого многообразия M путем изучения гладких вещественнозначных функций $f : M \to \mathbb{R}$. Эти функции рассматриваются как «функции высоты» на многообразии.

Критическая точка функции f — это точка $p \in M$, в которой ее дифференциал df_p обращается в ноль. Точка p называется невырожденной, если матрица вторых частных производных (гессиан) $H_f(p)$ в этой точке невырождена.

Функция Морса — это гладкая функция, все критические точки которой невырождены.

Ключевой результат состоит в том, что функции Морса являются «типичными»: они образуют открытое плотное подмножество в пространстве всех гладких функций на M.

Лемма Морса утверждает, что в окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $(x_1, \dots, x_n)$ такие, что функция f имеет канонический вид:

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Число k, равное количеству отрицательных квадратов, называется индексом Морса точки p и обозначается $\mathrm{ind}(p)$. Индекс инвариантен и соответствует числу независимых направлений, в которых функция f убывает.

Топология подмногообразия уровня $M_a = f^{-1}((-\infty, a])$ изменяется только тогда, когда a проходит через критическое значение $f(p)$. Это изменение топологически эквивалентно приклеиванию k-ручки $(D^k \times D^{n-k})$, где $k = \mathrm{ind}(p)$.

Этот процесс дает разложение на ручки многообразия M, которая определяет на нем структуру CW-комплекса.

Неравенства Морса связывают количество критических точек c_k индекса k с числами Бетти $b_k(M) = \mathrm{rank}(H_k(M, \mathbb{Z}))$.

- Слабые: $c_k \geq b_k$.
- Сильные: $\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} c_i \geq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} b_i$.
- Эйлерова хар-ка: $\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$.

Функция Морса называется совершенной, если $c_k = b_k$ для всех k.

Часть II: Теорема Бьялыницки-Бируля

В алгебраической геометрии аналогом однопараметрической группы преобразований является действие мультипликативной группы $\mathbb{G}_m = k^*$ на гладком проективном многообразии X.

Множество неподвижных точек $X^{\mathbb{G}_m}$ состоит из точек $p \in X$, инвариантных относительно действия $\mathbb{G}_m$. Эти точки являются алгебраическим аналогом критических точек функции Морса. Обозначим через $F_1, \dots, F_r$ связные компоненты $X^{\mathbb{G}_m}$.

Для каждой компоненты F_i определяются два подмножества в X:

- Плюс-клетка (притягивающее множество):
$$X_i^+ = \{x \in X \mid \lim_{t \to 0} t \cdot x \in F_i\}$$
- Минус-клетка (отталкивающее множество):
$$X_i^- = \{x \in X \mid \lim_{t \to \infty} t \cdot x \in F_i\}$$

Эти множества (ячейки Бьялыницки-Бируля) являются локально замкнутыми и образуют два разложения многообразия X на непересекающиеся подмногообразия:

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{r} X_i^+ \quad \text{и} \quad X = \bigsqcup_{i=1}^{r} X_i^-$$

Теорема Бьялыницки-Бируля (1973) утверждает, что для гладкого проективного многообразия X с действием $\mathbb{G}_m$ предельные отображения $\pi_i^\pm : X_i^\pm \to F_i$ являются морфизмами, которые наделяют каждую ячейку $X_i^\pm$ структурой расслоения на аффинные пространства над базой F_i.

Теорема Бьялыницки-Бируля имеет важное следствие. Если X — гладкое комплексное проективное многообразие, его группы гомологий можно вычислить через гомологии компонент неподвижных точек:

$$H_m(X, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H_{m-2d_i^+}(F_i, \mathbb{Z})$$

где $d_i^+ = \dim_{\mathbb{C}}(\text{слоя } X_i^+ \to F_i)$.

Часть III: Соответствие между теориями

Теория Морса	Теория Бьялыницки-Бируля
Гладкое многообразие M	Гладкое проективное многообразие X
Функция Морса $f : M \to \mathbb{R}$	Действие $\mathbb{G}_m : \mathbb{G}_m \times X \to X$
Критические точки f	Неподвижные точки $X^{\mathbb{G}_m}$
Устойчивое мн-во $W^s(p)$	Плюс-клетка X_p^+
Неустойчивое мн-во $W^u(p)$	Минус-клетка X_p^-
Индекс Морса $k = \dim_{\mathbb{R}}(W^u(p))$	Компл. размерность слоя минус-клетки
Собств. значения гессиана	Веса действия $\mathbb{G}_m$ на T_pX
Число отриц. собств. значений	Число отрицательных весов
Приклеивание ручки	Расслоение на аффинные пространства

Часть IV: Приложения и вычисления

Теория Морса на S^2: Рассмотрим функцию высоты $f(x, y, z) = z$ на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

- Крит. точки: Южный полюс p_S и Северный полюс p_N.
- Индексы: $\mathrm{ind}(p_S) = 0$, $\mathrm{ind}(p_N) = 2$.
- Декомпозиция: Приклеивается 0-ручка, затем 2-ручка.
- Вычисление: $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1$. Из $\chi(S^2) = 2$ и $b_0 = b_2 = 1$ следует $b_1 = 0$. Числа Бетти: $(1, 0, 1)$.

Теорема Бьялыницки-Бируля на $\mathbb{P}^1$: Рассмотрим действие $t \cdot [z_0 : z_1] = [tz_0 : z_1]$ на $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- Неподв. точки: $p_0 = [0 : 1]$ и $p_\infty = [1 : 0]$.
- Веса в $T_p\mathbb{P}^1$: В p_0 вес $+1$, в p_∞ вес -1.
- Индексы: $\mathrm{ind}(p_0) = 0$, $\mathrm{ind}(p_\infty) = 1$.
- Декомпозиция: $X_{p_\infty}^- \cong \mathbb{A}^1$, $X_{p_0}^- = \{p_0\}$. $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$.
- Вычисление гомологий: $H_*(\mathbb{P}^1) \cong H_{*-2}(\{p_\infty\}) \oplus H_*(\{p_0\})$. Это дает $H_0(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$ и $H_2(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$. Числа Бетти: $(1, 0, 1)$.

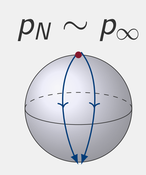

Рис.: Поток на S^2 (аналог $\mathbb{P}^1$).

Основная литература:

1. Białynicki-Birula, A. (1973). Some theorems on actions of algebraic groups. Annals of Mathematics, 98(3), 480-497.
2. Milnor, J. (1963). Morse Theory. Princeton University Press.
3. Chriss, N., & Ginzburg, V. (2010). Representation Theory and Complex Geometry. Birkhäuser.
4. Drinfeld, V. (2013). On algebraic spaces with an action of $\mathbb{G}_m$. arXiv:1308.2604.

Гипотеза Чилиберто – Ди Дженнаро для гиперповерхностей степени 6

Квитко Ксения Васильевна [1]

[1]НИУ ВШЭ, Москва

Основные понятия

Алгебраическое многообразие X называется **факториальным**, если группа Пикара Pic(X) совпадает с группой классов Cl(X).
Пусть X – гиперповерхность $\{F = 0\}$ в Proj $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]$.
Будем говорить, что X – **нодальная**, если она имеет особенности не хуже обыкновенных двойных точек (нодов). Тогда факториальность X (или эквивалентно, $\mathbb{Q}$-факториальность) равносильна факториальность кольца $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]/(F)$.

Гипотеза Чилиберто – Ди Дженнаро

Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – нодальная гиперповерхность степени $d \geqslant 3$, имеющая не более $2(d-2)(d-1)$ особых точек. Тогда

- *либо она факториальна,*
- *либо **она содержит плоскость** и имеет $(d-1)^2$ нодов,*
- *либо **она содержит квадратичную гиперповерхность** и имеет $2(d-2)(d-1)$ нодов.*

Известные результаты

- Гипотеза верна **для кубических гиперповерхностей** (Finkelnberg и Werner 1989).
- Гипотеза верна **в случае квартик** (Cheltsov 2006, Shramov 2007).
- Гипотеза верна **в случае гиперповерхностей степени** $d \geqslant 7$ (Kloosterman 2022).

Связь с алгеброй: дефект гиперповерхности

Дефектом $X \subset \mathbb{P}^4$ называют число $h^4(X) - h^2(X)$, т.е. ранг группы Cl(X)/Pic(X). И обозначают как $\delta(X)$.
Пусть J – идеал нодов. Тогда существует связь между функцией Гильберта идеала J и дефектом $\delta(X)$ (Dimca 1990):

$$\delta(X) = \#\mathrm{Sing}(X) - h_J(2d-5). \quad (1)$$

Артиновы горенштейновы кольца

Пусть $H = \{x_4 = 0\}$ – гиперплоское сечение, не проходящее через ноды. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to (R/J)_{k-1} \xrightarrow{\cdot x_4} (R/J)_k \to (S/J_H)_k \to 0, \quad (2)$$

где $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_4]$, $S = R/(x_4) \simeq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, J_H – образ J в S, и верно

$$h_{J_H}(2d-4) > 0.$$

Выберем в S_{2d-4} подпространство W коразмерности 1, содержащее $(J_H)_{2d-4}$, и положим

$$I_e = \begin{cases} \{f \in S \mid fS_{2d-4-e} \subset W\} & e \leqslant 2d-4, \\ S_e & e > 2d-4, \end{cases}$$

Тогда функция Гильберта идеала $I \supseteq J_H$ симметрична

$$h_I(2d-4-e) = h_I(e),$$

а (локальное) артиново факторкольцо S/I – **горенштейново**.
Цоколь Soc(S/I) – аннулятор максимального идеала, является одномерным как векторное пространство.
Цокольная степень – степень многочлена, порождающего Soc(S/I).

Подход Клустермана

Доказательсво гипотезы для $d \geqslant 7$ с помощью формулы (1) сводится к изучению свойств функций Гильберта кольца S/I, построенного в предыдущем разделе, и опирается на следующие леммы.

Лемма 1

Пусть $d \geqslant 6$. Если $h_I(d-4) \leqslant 2d-7$, то Sing(X) содержит полное пересечение мультистепени $(1, 1, d-1, d-1)$ либо $(1, 2, d-2, d-1)$.

Лемма 2

Пусть $d \geqslant 7$. Если $h_I(d-4) > 2d-7$, то $\#$Sing(X) $\geqslant 2(d-2)(d-1)+1$.

Набросок доказательства гипотезы. Если $X = \{F = 0\}$ не факториальна, то идеал нодов J содержится в некотором идеале полного пересечения $I_{CI} = (f_1, \dots, f_4)$ по Лемме 1. Тогда $F \in (f_1, \dots, f_4)$. Так как $\{f_1 = \dots = f_4 = 0\} \subset \mathrm{Sing}(X)$ – ноды, совокупность $\{f_1, \dots, f_4\}$ образует локальную систему координат. Тогда $h_i \in I_{CI}$. С учётом равенства $\deg F = d$ заключаем, что все $h_i \in (f_1, f_2)$. А значит, X содержит $\{f_1 = f_2 = 0\}$ – либо плоскость, либо квадрику (в зависимости от мультистепени I_{CI}).

Гиперповерхности степени 6

Покажем, что утверждение Леммы 2 выполнено и для $d = 6$. Используем оценки Клустермана из таблицы.

k	0	1	2		m		$d-4$	$d-3$	$d-2$
$h_I(k)$	1	$\geqslant 3$	$\geqslant 6$		$\geqslant 2m+2$		$\geqslant 2d-6$	$\geqslant 2d-6$	$\geqslant 2d-6$

Таблица 1. Оценки на значения функции Гильберта идеала I.

Из формулы (1) получаем $\#\mathrm{Sing}(X) \geqslant h_J(2d-4)$. Из точной последовательности (2) и по построению идеала I

$$h_J(2d-5) = \sum_{k=0}^{2d-4} h_{J_H}(k) \geqslant \sum_{k=0}^{2d-4} h_I(k).$$

Таким образом, имеем $\#\mathrm{Sing}(X) \geqslant (2d-14) + 2(d-2)(d-1)$.
При $d = 6$ правая часть этого неравенства равна 38. Для доказательства Леммы 2 необходимо исключить наборы значений $(h_I(0), \dots, h_I(2d-4))$, которые в сумме дают 38, 39 и 40. С учётом оценок из Таблицы получаем 6 вариантов, которые не реализуются:

$$\text{(i)} = (1,3,6,6,6,6,6,3,1), \quad \text{(ii)} = (1,4,6,6,6,6,6,4,1),$$
$$\text{(iii)} = (1,3,6,7,6,7,6,3,1), \quad \text{(iv)} = (1,3,7,6,6,6,7,3,1),$$
$$\text{(v)} = (1,3,6,6,7,6,6,3,1), \quad \text{(vi)} = (1,3,6,6,8,6,6,3,1).$$

Список литературы

Kloosterman, R. (2022). "Maximal families of nodal varieties with defect". В: *Mathematische Zeitschrift* 300.2, с. 1141—1156.

Shramov, K. (2007). "$\mathbb{Q}$-factorial quartic threefolds". В: *Sbornik: Mathematics* 198.8, с. 1165—1174.

Cheltsov, I. (2006). "Nonrational nodal quartic threefolds". В: *Pacific Journal of Mathematics* 226.1, с. 65—81.

Dimca, A. (1990). "Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems". В: *Duke Mathematical Journal* 60.1, с. 285—298.

Finkelnberg, H. и J. Werner (1989). "Small resolutions of nodal cubic threefolds". В: *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 51.2, с. 185—198.

 ksenia.kvitko@yahoo.com

Generalized semi-characteristic and R-restricted cobordism

Lavrukhin Viktor

August 2025

1 The generalized semi-characteristic of a bounding (B, f)-manifold

Define *the subgroup of relations on Stiefel–Whitney numbers of closed manifolds* $\mathcal{R}_{n+1}$ to be the subgroup of $H^{n+1}(BO_{n+1})$ given by

$$\mathcal{R}_{n+1} = \bigcap_{Z} \ker(\tau_Z^*\colon H^{n+1}(BO_{n+1}) \to H^{n+1}(Z)),$$

where the intersection is taken over all closed $(n+1)$-dimensional manifolds $Z \subset \mathbb{R}^q$.

For an arbitrary relation $R \in \mathcal{R}_{n+1}$ consider its inverse image $i^*(R) \in H^{n+1}(BO_n)$ and its classifying map $c\colon BO_n \to K(\mathbb{Z}/2, n+1)$. Let B be the homotopy fiber of the map c. Then there is a homotopy fibration sequence

$$K(\mathbb{Z}/2, n+1) \to B \xrightarrow{f} BO_n \xrightarrow{c} K(\mathbb{Z}/2, n+1).$$

The main objects of our interest will be closed n-dimesional (B, f)-manifolds with B and f as above.

Let (X, g_X) be a (B, f)-manifold with X being bounding. Choose a null-cobordism Y for X. Then we have the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dd, "f"'] & & & \\
& X \arrow[ul, "g_X"'] \arrow[r, "\mathrm{in}"] \arrow[dl, "\tau_X"] & Y \arrow[dr, "\tau_Y"] & \\
BO_n \arrow[rrr, "i"'] & & & BO_{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Consider the morphism of pairs $(g_X, \tau_Y)\colon (X \xrightarrow{\mathrm{in}} Y) \to (B \xrightarrow{i \circ f} BO_{n+1})$.

Definition 1. *For a bounding (B, f)-manifold (X, g_X), the generalized semi-characteristic is given by*

$$\varkappa_r^Y(X, g_X) := \langle (g_X, \tau_Y)^*(r), [Y] \rangle \in \mathbb{Z}/2.$$

In essence $\varkappa_r^Y$ does not depend on Y and r, so we write $\varkappa_R$. Let us now consider examples of the generalized semi-characteristic for specific relations.

If n is even, then there is a relation $R = w_{n+1} \in \mathcal{R}_{n+1}$.

Proposition 2. *Let n be an even integer. Consider a tangential structure (B, f) given by the relation $R = w_{n+1} \in \mathcal{R}_{n+1}$. Then for every bounding (B, f)-manifold (X, g_X) there is an equality*

$$\varkappa_{w_{n+1}}(X, g_X) = \frac{\chi(X)}{2} \bmod 2.$$

For a closed manifold X of dimension n, there is the Kervaire semi-characteristic

$$\kappa(X) := \frac{\dim H^*(X)}{2} \bmod 2.$$

The following theorem shows that this invariant generalizes our invariant $\varkappa_R$ built from the relation R above.

Theorem 3. *Let $n = 2k-1$ be an odd integer. Consider the pair (B, f) given by the relation $R = w_{n+1} + v_k^2 \in \mathcal{R}_{n+1}$. Then for every bounding manifold X there exists some (B, f)-structure g_X on it such that there is an equality $\varkappa_R(X, g_X) = \kappa(X)$.*

2 Cobordism group Ω_n^R

Fix the relation $R \in \mathcal{R}_{n+1}$ and consider its classifying map $BO_{n+1} \xrightarrow{c_1} K(\mathbb{Z}/2, n+1)$. Let B_1 be the homotopy fiber of c_1 and $f_1 \colon B_1 \to BO_{n+1}$ be a canonical map.

Consider the homotopy pullback square

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B_1 \arrow[d, "f_1"] \\ BO_n \arrow[r, "i"'] & BO_{n+1}. \end{tikzcd}$$

Definition 4. *Let Ω_n^R be an abelian group of (B_1, f_1)-cobordism classes of (B, f)-manifolds. For a (B, f)-manifold (X, g_X) denote its class as $[X, g_X]^R$.*

Consider a natural forgetting homomorphism $U \colon \Omega_n^R \to \Omega_n^O$ given by $U([X, g_X]^R) = [X]^O$. By Remark **??**, this homomorphism is surjective. The next lemma effectively describes its kernel.

Lemma 5. *Let (X, g_X) be a bounding (B, f)-manifold. Then $[X, g_X]^R = 0$ if and only if $\varkappa_r(X, g_X) = 0$.*

Corollary 6. *There is a short exact sequence*

$$0 \to \ker(U) \to \Omega_n^R \xrightarrow{U} \Omega_n^O \to 0,$$

and $\varkappa_r \colon \ker(U) \to \mathbb{Z}/2$ is an isomorphism.

Example 7. *Consider the relation $w_1^2 + w_2 \in \mathcal{R}_2$ and the corresponding group $\Omega_1^{w_1^2+w_2}$.*

- *According to [?], the obstruction for the existence of the Pin^--structure is exactly the class $w_1^2 + w_2$. So, $\Omega_1^{w_1^2+w_2} \cong \Omega_1^{\mathrm{Pin}^-}$.*
- *Since $\Omega_1^O = 0$, we have $\ker(U) = \Omega^{w_1^2+w_2}$. We conclude that $\varkappa_r \colon \Omega_1^{\mathrm{Pin}^-} \to \mathbb{Z}/2$ is an isomorphism by the previous corollary.*
- *Since $w_1 = v_1$, by Theorem 3, we have $\varkappa_r = \kappa$, where κ denotes the Kervaire semi-characteristic.*

Example 8. *Consider the relation $w_4 + w_2^2 \in \mathcal{R}_4$ and the corresponding group $\Omega_3^{w_4+w_2^2}$.*

- *Consider space $\tilde{B}$ and map $\tilde{f} \colon \tilde{B} \to BO_n$ as above. For 3-dimensional $(\tilde{B}, \tilde{f})$-manifold $(X, \tilde{g}_X)$ the Wu class $v_2(\tau_X)$ vanishes. Since $v_2 = w_2 + w_1^2$, according to [?] existence of $(\tilde{B}, \tilde{f})$-structure is equivalent to existence of Pin^--structure. Hence, $\Omega_3^{w_4+w_2^2} = \Omega_3^{\mathrm{Pin}^-}$.*
- *Since $\Omega_3^O \cong 0$, we have $\ker(U) = \Omega_3^{w_4+w_2^2}$. As before, this implies that there is an isomorphism $\varkappa_r \colon \Omega_3^{\mathrm{Pin}^-} \to \mathbb{Z}/2$.*
- *Also, as in the previous example, $\varkappa_r(X, g_X) = \kappa(X)$. In particular $\kappa(X)$ is invariant under the (B_1, f_1)-cobordism relation.*

Example 9. *If n is even, then there is a relation $R = w_{n+1} \in \mathcal{R}_{n+1}$. For the bounding (X, g_X) (B, f)-manifold and null-cobordism Y for X there is a sequence of equalities*

$$\varkappa_{w_{n+1}}(X, g_X) = \chi(Y) \bmod 2 = \left(\frac{1}{2}\chi(X)\right) \bmod 2.$$

Consider $(\mathbb{R}P^n, g_{\mathbb{R}P^n})$ with any (B, f)-structure $g_{\mathbb{R}P^n} \colon \mathbb{R}P^n \to B$. Since

$$\varkappa_{w_{n+1}}(2[\mathbb{R}P^2, g_{\mathbb{R}P^n}]^R) = \chi(\mathbb{R}P^n) \bmod 2 = 1$$

we have $2[\mathbb{R}P^2, g_{\mathbb{R}P^n}]^R \neq 0 \in \Omega_n^R$. Hence the exact sequence

$$0 \longrightarrow \ker(U) \longrightarrow \Omega_n^R \xrightarrow{\ U\ } \Omega_n^O \longrightarrow 0$$

does not split and there is the homomorphism $\chi \bmod 4 \colon \Omega_n^R \to \mathbb{Z}/4$.

Глобальная размерность кольца эндоморфизмов прямой суммы циклических групп

Милаков Матвей Андреевич

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Постановка задачи

Проективной размерностью R-модуля M называется наименьшее n такое, что M имеет проективную резольвенту длины n. Обозначается как $\mathrm{lpd}(M)$. Если конечной проективной резольвенты нет, длина полагается равной ∞.

Левой глобальной размерностью кольца R называют супремум проективных размерностей всех левых R-модулей, обозначается $\mathrm{lDim}(R)$.

A – конечно порождённая абелева группа, $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$. Чему равна глобальная размерность R?

Результат B.L. Osofsky, 1970

Кольцо эндоморфизмов группы $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p – некоторое простое число, имеет глобальную размерность $k+1$ тогда и только тогда, когда $2^{\aleph_0} = \aleph_k$. Если же $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$, то любое кольцо эндоморфизмов бесконечной прямой суммы циклических групп будет иметь бесконечную глобальную размерность. То есть, случай бесконечной прямой суммы зависит от континуум-гипотезы

Конечный p-случай, фильтрация

A – конечная абелева p-группа, p – некоторое простое число. Имеется разложение

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i,$$

где A_i – сумма циклических подгрупп порядка p^{m_i}.

$m_1 > m_2 > \ldots > m_n > m_{n+1} = 0$ – длины прямых циклических слагаемых, встречающихся в A.

Введём обозначение $A_{(k)} = \{a \in A \mid \mathrm{ord}(a) \leqslant p^k\}$.

- $A_{(k)}$ – R-подмодуль в A.
- $A = A_{(m_1)} > A_{(m_1 - 1)} > \cdots > A_{(1)} > A_{(0)} = 0$ – строго убывающая фильтрация R-модулей

Если для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $m_i - m_{i+1} > 1$, то глобальная размерность R окажется равной бесконечности. Данное явление назовём *наличием пробела/скачка* в ряду $m_1 > \cdots > m_{n+1} = 0$ длин примарных циклических слагаемых. Этот феномен и оказывается ключевым в классификации глобальных размерностей колец эндоморфизмов конечно порождённых групп.

Утверждение 1: Проективность членов фильтрации

$A_{(m_i)}$ проективны для каждого i

Если же некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ верно $m_{i+1} < k < m_i$, то модуль $A_{(k)}$ не проективен.Более того, в этом случае $\mathrm{lpd}(A_{(k)}) = \infty$.

Пример бесконечной размерности кольца эндоморфизмов

$A = \mathbb{Z} / p^m\mathbb{Z}$, где $m > 1$. Имеется бесконечная 2-периодичная проективная резольвента:

$$\cdots \to \mathbb{Z}\big/ p^m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}\big/ p^m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p^{m-1}} \mathbb{Z}\big/ p^m\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\big/ p\mathbb{Z} \to 0,$$

сизигии которой не проективны.

Радикал Джекобсона

Радикалом Джекобсона R называется двусторонний идеал

$$\mathrm{J}(R) = \{r \in R \mid rM = 0 \text{ для всех простых модулей } M\}.$$

Для левого артинового кольца R верно

$$\mathrm{lDim}(R) = \mathrm{lpd}_R\left(R\big/\mathrm{J}(R)\right).$$

Все простые левые модули над R имеют вид $A_{(m_i)} \,/\, B_i$ для единственного максимального подмодуля $B_i \leqslant A_{(m_i)}$. В случае отсутствия пробелов в ряде длин есть проективная резольвента

$$0 \to A_{(m_i)} \to A_{(m_{i-1})} \oplus A_{(m_{i+1})} \to A_{(m_i)} \to A_{(m_i)}\big/ B_i \to 0.$$

Более того,

$$\mathrm{J}(R) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} B_i, \qquad R\big/\mathrm{J}(R) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \left(A_{(m_i)}\big/ B_i\right), \qquad \mathrm{lDim}(R) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{lpd}\left(A_{(m_i)}\big/ B_i\right).$$

Значит, $\mathrm{lpd}\left(A_{(m_i)} \,/\, B_i\right) \leqslant 2$. Можно показать, что B_i не проективны, а значит проективная размерность $A_{(m_i)} \,/\, B_i$ в точности 2.

Глобальная размерность кольца эндоморфизмов прямой суммы циклических групп

Милаков Матвей Андреевич

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Конечный случай

Пусть A – конечная абелева группа, $\{p_i\}_{i=1}^n$ – набор таких простых чисел, что существует разложение

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i,$$

где A_i – конечная абелева p_i-группа. $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ является прямой суммой колец $R_i = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A_i)$.
$m_1^j > \cdots > m_n^j > m_{n_j+1}^j = 0$ – длины циклических прямых слагаемых, встречающихся в A_j. Тогда имеется следующая альтернатива:

- Если хоть для одного j в ряду p_j-длин есть пробел, то $\mathrm{lDim}(R) = \infty$.
- Если пробелов нет, притом $\max_j(n_j) > 1$, то $\mathrm{lDim}(R) = 2$.
- Если $n_j = 1$ и $m_1^j = 1$ для каждого j, то $\mathrm{lDim}(R) = 0$.

Конечно порожденный случай

A – конечно порождённая группа бесконечного порядка. Существует разложение $A = T \oplus F$, где T – конечная абелева группа, $F \cong \mathbb{Z}^n$ – свободная абелева группа конечного ранга, $n \geqslant 1$. $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ записывается как кольцо верхнетреугольных матриц:

$$R = \begin{pmatrix} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(T) & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, T) \\ 0 & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(F) \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения для ортогональной пары проекторов

$$e_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$R^T = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(T)$ изоморфно кольцу $e_T R e_T = R e_T$.
Имеем кольцевой гомоморфизм

$$\phi : R \to R^T, \qquad r \mapsto r e_T.$$

Гомоморфизм ϕ задаёт функтор

$$\Phi : {}_{R^T}Mod \to {}_{R}Mod.$$

Φ является полным вложением ${}_{R^T}Mod$ в ${}_{R}Mod$, его существенный образ – это все R-модули, аннулируемые e_F.
Функтор Φ допускает правый сопряженный Ψ

$$\Psi : {}_{R}Mod \to {}_{R^T}Mod,$$

$$M \mapsto e_T M, \quad f \mapsto f|_{e_T M}.$$

Более того, они точны и переводят проективные объекты в проективные, значит, сохраняют проективную размерность.

Формула для глобальной размерности

R – некоторое кольцо, $\{e_i\}_{i=1}^n$ – конечный полный набор ортогональных идемпотентов. Тогда
$\mathrm{lDim}(R) = \sup\{\mathrm{lpd}\,(Re_i \,/\, J) \mid J - \text{ подмодуль } Re_i,\ i = 1, \dots n\}$. Из этого равенства следует формула для $\mathrm{lDim}(R)$:

$$\max\left(\mathrm{lDim}(R^T),\ \sup\left\{\mathrm{lpd}\left({}^{A}\!/_{B}\right) \mid B - R\text{-подмодуль в } A\right\}\right).$$

Утверждение 2: Связь с глобальной размерностью кольца эндоморфизмов подгруппы кручения

Пусть A – конечно порождённая абелева группа бесконечного порядка, T – её подгруппа кручения. Если $T \neq 0$, имеем равенство:

$$\mathrm{lDim}(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)) = \max(\mathrm{lDim}(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(T)), 2).$$

Теорема 3: Глобальная размерность колец эндоморфизмов конечно порожденных абелевых групп

Пусть A – конечно порожденная абелева группа, для которой имеется разложение

$$A = F \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} T_{p_i},$$

где $F \cong \mathbb{Z}^n$, $\{p_i\}_{i=1}^k$ – попарно различные простые, T_{p_i} – конечные абелевы p_i-группы.

- *Если в ряду p_i-длин есть скачок, то $\mathrm{lDim}(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)) = \infty$*
- *Если $F = 0$, а T – прямая сумма простых абелевых групп, то $\mathrm{lDim}(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)) = 0$.*
- *Если $F \neq 0$ и $T = 0$, то $\mathrm{lDim}(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)) = 1$.*
- *Во всех оставшихся случаях $\mathrm{lDim}(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)) = 2$.*

Local coefficients for genuine equivariant cohomology

ARTEM PRIHODKO
Jointwork in progress with Nikolay Konovalov and Ivan Perunov

Let X be a topological space equipped with an action of a topological group G. For an abelian group A one can associate a homotopy theoretic invariant of $G \curvearrowright X$, the so called **Borel equivariant cohomology** $H^*_G(X, A)$. More generally, for a generalized cohomology theory $A \in \mathrm{Sp}$ one can define

$$H^*_G(X, A) := A^*(X_{hG}),$$

where $X_{hG} \simeq (X \times EG)/G$ denotes the homotopy quotient (with real coefficients this can be computed using the equivariant de Rham complex, but we would like to move in another direction). It is well-known that if G is a compact Lie group one can do better (partially, since X_{hG} usually is an infinite CW complex). E.g. Atiyah and Segal studied an association

$$G \curvearrowright X \longmapsto KU^0_G(X) := K^0(\mathrm{Vect}_G(X)),$$

where K^0 denotes the Grothendiek group completion functor and $\mathrm{Vect}_G(X)$ denotes the groupoid of G-equivariant complex vector bundles on X. The relation of $KU^0_G(X)$ with the more naive Borel-equivariant version $H^0_G(X, KU)$ is explained in the following celebrated result.

Theorem 1 (Atiyah–Segal completion theorem)**.** *For X there is a natural ring homomorphism*

$$KU^0_G(X) \longrightarrow H^0_G(X, KU)$$

which identifies the target with the completion of the source in the augmentation ideal if X is a finite G-CW complex.

One can extend KU^0_G to the $\mathbb{Z}$-graded functor KU^*_G which turns out to be an example of the so-called **genuine equivariant cohomology theory**. Like the usual category of spectra Sp serves as a well behaved home to study generalized cohomology theories the **genuine G-equivariant stable category** Sp^G developed and studied by May and many others is considered as a correct setting to study generalized genuine equivariant cohomology theories like KU^*_G.

Geometry. This was a homotopy theoretic story. Recall that in geometry outside of the smooth compact case the ordinary cohomology is ill-behaved and one usually replaces it with the **Borel–Moore** or **compactly supported cohomology of $H^*_c(X, A)$ of** X or intersection cohomology. Now, arguably the most robust definition of the Boreel–Moore homology is via the category of sheaves $\mathcal{S}\mathrm{hv}(X, A)$ as the pushforward with compact support functor (!-pushforward). The question arises:

Question 2. For X equipped with an action of a compact Lie group G is there a weel behaved theory of G-equivariant sheaves categorifying equivariant cohomology similarly to how the ordinary category of sheaves categorifies singular cohomology?

It turns out that the answer for the naive Borel equivariant cohomology (possibly with coefficients in a generalized cohomologpy theory) is positive and goes by the name of the **Bernstein–Lunts equivariant category**. The original construction is different, but with the advances in higher category theory of the last few decades it can be defined simply as a category of sheaves on the topological quotient stack $[X/G]$ (a la Drinfeld–Gaitsgory–Rozenblum). Surprisingly, for genuine equivariant cohomology the question wasn't considerdd before even in the case of locally constant coefficients. In fact, even a definition of Borel–Moore (co)homology is not available in the genuine case.

Our contribution to the field is summarized below.

Theorem 3. *Let X be a topological space equipped with an action of a compact Lie group G and let A be an E_∞-ring spectrum in Sp^G. Then one can assign a category $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{gen}}([X/G], A)$* ***of genuine equivariant sheaves on*** *X with the following properties:*

(1) The assignment is functorial in X in the sense that there are $*$- pullback and pushforward functors.

(2) There are proper pushforward and extraordinary pullback functors. Proper base change holds.

(3) For smooth G-manifolds Poincaré–Verdier duality (comparison of $*$- and $!$-pullbacks) holds.

(4) For X locally G-equivariantly contractible the cohomology of the structure sheaf recover genuine equivariant cohomolopgy of X.

Remark 4. In fact, as notation suggest, by construction $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{gen}}([X/G], A)$ depends only on the underlying quotient stack $[X/G]$. This encodes various change of group comptbilities, i.e. that genuine sheaves on X with free action of G identify with the ordinary sheaves on the quotient.

Example 5. For $X = *$ the corresponding category identifies naturally with $\mathrm{Mod}_A(\mathrm{Sp}^G)$.

The application we have in mind requires non-locally constant coefficients (e.g. a theory of genuine Borel–Moore (co)homology), but we also construct a homotopy theoretic invariant category $\mathrm{LocSys}^{\mathrm{gen}}(X//G, A)$ **of genuine equivariant local systems**. For X locally contractible this category identifies with the full subcategory of $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{gen}}([X/G], A)$ spanned by locally constant objects.

Complex oriented case. As a part of his broad project of understanding elliptic cohomology Lurie developed in the complex oriented case for finite G a theory of **tempered cohomology** and **tempered local systems** $\mathrm{LocSys}^{\mathrm{temp}}$, which largely motivated us during the earlier stage of the project. The idea roughly is to force Theorem 1 to hold by definition. Our last main construction-result is a generalization of this theory to arbitrary compact Lie groups and non-locally constant coefficients.

Theorem 6. *For X a topological space equipped with an action of a compact Lie group G and an oriented abelian group spectral stack A (in the sense of Lurie) there is a category $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{temp}}([X/G], A)$ which categoryfies A-tempered cohomology similarly to how $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{gen}}$ categofies genuine equivariant cohomology. Moreover, $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{temp}}$ is an idempotent monoidal localization of $\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{gen}}$, so that it admits six functors and the Verdier duality holds.*

Remark 7. As in the genuine setting we construct a homotopy theoretic version $\mathrm{LocSys}^{\mathrm{temp}}(X//G, A)$. In the case of finite G this category coincides with the one introduced by Lurie.

Example 8. For $G = U(1)$ there is a natural equivalence

$$\mathrm{LocSys}^{\mathrm{temp}}(*//U(1), A) \simeq \mathrm{QCoh}(A).$$

Finally, we summarize various construction and categories mentioned above in the following table. Hopefully, this can be of some use.

	Constant coefficients	Locally constant coefficients	General local coefficients
Non equivariant	Generalized cohomology A^*	$\mathrm{LocSys}(X, A)$	$\mathcal{S}\mathrm{hv}(X, A)$
Borel-equivariant	Borel construction $H^*_G(X, A)$	$\mathrm{LocSys}(X_{hG}, A)$	$\mathcal{S}\mathrm{hv}([X/G], A)$
Genuine equivariant	Genuine equiv. coh. $A^*_G(X)$	$\mathrm{LocSys}^{\mathrm{gen}}(X, A)$	$\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{gen}}([X/G], A)$
Gen. equiv. with complex oriented coeffs.	Tempered cohomology $A^*_G(X)$	$\mathrm{LocSys}^{\mathrm{temp}}(X, A)$	$\mathcal{S}\mathrm{hv}^{\mathrm{temp}}([X/G], A)$

Finite subgroups of automorphism groups of non-trivial Severi–Brauer varieties

Alexandra Sonina — Higher School of Economics, Laboratory of Algebraic Geometry (Moscow)

Severi–Brauer varieties

Definition

An algebraic variety X of dimension n over a field $\mathbb{k}$ is called a Severi–Brauer variety if it becomes isomorphic to $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{k}}}$ after the extension of scalars to the algebraic closure $\bar{\mathbb{k}}$ of $\mathbb{k}$.

Definition

A Severi–Brauer variety is non-trivial if it is not isomorphic to $\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$ over the base field $\mathbb{k}$.

Theorem [3].

A Severi–Brauer variety over $\mathbb{k}$ is trivial if and only if it has a $\mathbb{k}$-point.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Severi–Brauer varieties}\\ \text{of dimension } n \text{ over } \mathbb{k}\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{central simple algebras}\\ \text{of degree } n \text{ over } \mathbb{k}\end{array}\right\}$$

Theorem, [1] F. Châtelet.

Let X be a Severi–Brauer variety over a field $\mathbb{k}$ corresponding to a central simple algebra A. Then $\mathrm{Aut}(X) \cong A^*(\mathbb{k})/\mathbb{k}^*$.

Balanced product

Notation

Let $\boldsymbol{\mu}_n$ be a cyclic group of order n.

Let n be a positive integer and

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i},$$

where p_i are pairwise different prime numbers. One has canonical isomorphism

$$\boldsymbol{\mu}_n^* \cong \prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{\mu}_n^*(p_i),$$

where $\boldsymbol{\mu}_n^*(p_i) \cong \boldsymbol{\mu}^*_{p_i^{r_i}}$.

Definition

Let q be a prime number. Suppose that n is divisible only by primes $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$ and let $\chi : \boldsymbol{\mu}_q \to \boldsymbol{\mu}_n^*$ be a homomorphism. We say that χ is balanced if its composition with each of the projections $\boldsymbol{\mu}_n^* \to \boldsymbol{\mu}_n(p_i)^*$ is an embedding. We say that a semidirect product G of $\boldsymbol{\mu}_n$ and $\boldsymbol{\mu}_q$ corresponding to the homomorphism χ is balanced if χ is balanced.

The problem and previous results

In the classical article [2] I. Dolgachev and V. Iskovskikh classified finite subgroups of $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Since Severi–Brauer variety is a skew form of projective space, one wants to answer this question:

"What finite groups can appear as subgroups of these automorphism groups?"

This question was developed by C. Shramov and A. Savelyeva. They showed the following theorems:

Theorem 1.

1. [6, A. Savelyeva] Let X be a non-trivial Severi–Brauer variety of dimension $q-1$ over a field $\mathbb{K}$, where $q \geq 3$ is prime and $q \neq \mathrm{char}(\mathbb{K})$. Let G be a finite subgroup of $\mathrm{Aut}(X)$, then there exists a positive integer n such that G is isomorphic to a subgroup of $\boldsymbol{\mu}_q \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_q)$, where the semidirect product is balanced.
2. [4, C. Shramov] For any n such that the semidirect product $\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3$ is balanced there exists a field $\mathbb{L} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ and a non-trivial Severi–Brauer surface S over $\mathbb{L}$, such that $\boldsymbol{\mu}_3 \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3)$ is a subgroup of $\mathrm{Aut}(S)$.
3. [5, C. Shramov] Let S be a non-trivial Severi–Brauer surface over field of characteristic zero. Then any finite subgroup of $\mathrm{Bir}(S)$ is conjugate either to a subgroup of $\mathrm{Aut}(S)$, or to a subgroup of $\boldsymbol{\mu}_3^3$.

Main results

It was proven that there is a universal example of non-trivial Severi–Brauer variety, whose group of automorphism contains all possible finite subgroups and, moreover, in the case of dimension 2 its group of birational automorphism contains $\boldsymbol{\mu}_3^3$.

Theorem 2, S.

Let $q \geq 3$ be a prime number. There exists a field $\mathbb{k} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ and a non-trivial Severi–Brauer variety X of dimension $q-1$ over $\mathbb{L} = \mathbb{k}(t)$, where t is a transcendental variable, such that $\mathrm{Aut}(X)$ contains all groups $\boldsymbol{\mu}_q \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_q)$, where the semidirect product is balanced. Moreover, if $q = 3$ then $\boldsymbol{\mu}_3^3 \subset \mathrm{Bir}(X)$.

Additionally, the case where the base field has positive characteristic was developed.

Notations

Denote by $\mathrm{ord}_p(l)$ the minimum integer r such that $l^r - 1$ is divisible by p.
Let $v_q(l)$ be the maximum r such that l is divisible by q^r.

It was proven that in this case not all of the finite group described in Theorem 1 can be actually realized.

Theorem 3, S.

Let l be any prime number. Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic l. Let X be a non-trivial Severi–Brauer variety of dimension $q-1$ over a field $\mathbb{K}$, where $q \geq 3$ is prime and $l \neq q$. Then there exists a positive integer k such that for any finite subgroup G of $\mathrm{Aut}(X)$ there exists a positive integer $n = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$ such that $v_q(\mathrm{ord}_{p_i}(l)) = k$ for $1 \leq i \leq m$ and G is isomorphic to a subgroup of $\boldsymbol{\mu}_q \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_q)$, where the semidirect product is balanced.

The last theorem states that for any integer $k \geq 1$ there is a universal example of non-trivial Severi–Brauer variety, whose group of automorphism contains all possible finite subgroups with respect to k.

Theorem 4, S.

Let l be any prime number. Let $q \geq 3$ be a prime number and $l \neq q$, let k be a positive integer. Then there exists a field $\mathbb{k} \subset \overline{\mathbb{F}_l}$ and a non-trivial Severi–Brauer variety X of dimension $q-1$ over $\mathbb{K} = \mathbb{k}(t)$ such that $\mathrm{Aut}(X)$ contains all groups $\boldsymbol{\mu}_q \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_q)$, such that the following conditions on those groups are met:

1. One has $n = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$, where p_i are pairwise different prime numbers such that $v_q(\mathrm{ord}_{p_i}(l)) = k$ for $1 \leq i \leq m$;
2. The semidirect product is balanced.

Questions

We only considered the case where the degree of a central simple algebra and characteristic of the base field are not equal.

Question

Let X be a non-trivial Severi–Brauer variety over base field $\mathbb{K}$. What can one tell about the finite subgroups of $\mathrm{Aut}(X)$ if $\mathrm{char}(k) = \dim(X) + 1$?

In Theorems 2 and 4 one has $\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{K} = 1$ over $\mathbb{Q}$ in the first case, and over $\mathbb{F}_l$ in the second case, where $\mathbb{K}$ is a base field. In positive characteristic there is no non-trivial Severi–Brauer variety over algebraic field, so $\mathrm{tr.deg}\,\mathbb{K} \geq 1$ in this case. So there is a following question:

Question

Are there any universal examples of non-trivial Severi–Brauer variety over a field $\mathbb{K}$, such that $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$?

Literature

- F. Châtelet. *Variations sur un thème de H. Poincaré*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **61** (1944), 249–300.
- I. Dolgachev, V. Iskovskikh. *Finite subgroups of the plane Cremona group*. Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 443–548, Progr. Math. 269, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009.
- Ph. Gille, T. Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **101**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- C. Shramov. Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces. Eur. J. Math. 7, no. 2, 591–612, 2021.
- C. Shramov. Birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces. Sb. Math., **211** (2020), no. 3, 466–480.
- A. Savelyeva. Finite subgroups of automorphism groups of Severi–Brauer varieties. arxiv:2503.20514

Нисневич-локальные эквивалентности для локальных открытых пар
УРАЗБАЕВ А. А.

Рассмотрим локальные гладкие открытые пары над произвольной схемой B, их классификацию с точностью до Нисневич-локальных эквивалентностей и мотивных эиваленостей, и группы гоморфизмов в категории $\mathbf{DM}(k)$, где k – произвольное поле. А именно

- доказаны Нисневич-локальные эквивалентности для локальных открытых пар над произвольной схемой B, и исследованы некоторые необходимые условия эквивалентности пар вида $X/(X-x)$, где x – замкнутая точка гладкой схемы X над нётеровой отделимой схемой B,
- вычислены группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(B)}(U, (\mathbb{A}^1_k - z_1)[l])$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(B)}((\mathbb{A}^1_k - z_0), (\mathbb{A}^1_k - z_1)[l])$, $U \in \mathrm{Sm}_k$, $z_0 \in \mathbb{A}^1_k$, $z_1 \in \mathbb{A}^1_k$, $l \in \mathbb{Z}$.

Для замкнутого вложния гладких B-схем $Z \to X$ хорошо известна Нисневич-локальная эквивалентность

$$(U, U - Z) \simeq_{\mathrm{nis}} (Z \times \mathbb{A}^{\mathrm{codim}_U Z}, Z \times (\mathbb{A}^{\mathrm{codim}_U Z} - 0)). \tag{0.1}$$

Получено обобщение указанного факта на произвольные схемы Z.

Теорема 0.2. *Пусть $X_0, X_1 \in \mathrm{Sm}_B$ для нетеровой отделимой схемы B, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $U_0 = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X_0,x_0}$ и $U_1 = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X_1,x_1}$ - локальный схемы, Z_0 и Z_1 замкнутые подсхемы U_0 и U_1. Предположим, что*

$$\dim_B U_0 = \dim_B U_1$$

и

$$(Z_0)_{\mathrm{red}} \simeq (Z_1)_{\mathrm{red}}.$$

тогда есть Нисневич локальная эквивалентность открытых пар над B

$$(U_0, U_0 - Z_0) \simeq_{\mathrm{nis}} (U_1, U_1 - Z_1); \tag{0.3}$$

в терминах категории Sch_B эквивалентность (0.3) означает наличие следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U_0 & \Gamma \arrow[l, "étale"'] \arrow[r, "étale"] & U_1 \\
Z_0 \arrow[u, hook] & \Theta \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, hook] & Z_1 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки – замкнутые вложения заданные по условию, верхние горизонтальные стрелки являются этальными, нижние горизонтальные стрелки являются изоморфизмами, и оба коммутативных квадрата являются расслоенными, т.е.

$$\Gamma \times_{U_0} Z_0 \cong \Theta \cong \Gamma \times_{U_1} Z_1.$$

Замечание 1. Для всякой пары схем $(U, U - Z) \in \mathrm{Sch}_B^{\mathrm{pair}}$, без ограничения общности схему Z допустимо считать приведённой поскольку имеет место равенство $U - Z = U - Z_{\mathrm{red}}$ открытых подсхем U.

Эквивалентности про-объектов $X/(X-Z) \simeq X'/(X'-Z')$ в стабильной мотивной гомотопической категории $\mathbf{SH}(B)$ и категории мотивов Воеводского $\mathbf{DM}(B)$ ранее были доказаны с использованием шести функторов Гротендика, а именно функторов $f_!$ по отношению к отделимым морфизмам конечного типа над B построенных в [**Cisinski-Deglise-Triangmixedmotives**]. Приведённая выше теорема влечёт эквивалентности в категории пучков с отмеченной точкой, и как следствие в нестабильной мотивной гомотопической категории Мореля-Воеводского с отмеченной точкой. Отметим, что эквивалентность с отмеченной точкой переходить в эквивалентность без отмеченной точки посредством забывающего функтора. Следует также отметить, что приведённое ниже утверждение имеет более простое доказательство, основанное на (0.1), когда поля вычетов B совершенны.

Следствие 0.4. *Пусть X_0, X_1 – гладкие схемы над B, и x_0, x_1 – замкнутые точки, $X_0 \neq x_0$, $X_1 \neq x_1$. Предположим, что $\dim^{x_0} X_0 = \dim^{x_1} X_1$, и поля вычетов в точке x_0 и x_1 – изоморфны. Тогда существует локальная эквивалентность пучков Нисневича с отмеченной точкой*

$$X_0/(X_0 - x_0) \simeq_{\mathrm{nis}} X_1/(X_1 - x_1),$$

и как следствие мотивная эквивалентность мотивных пространств

$$X_0/(X_0 - x_0) \simeq_{\mathrm{mot}} X_1/(X_1 - x_1) \in \mathbf{H}^\bullet(B)$$

в мотивной гомотопической категории Мореля-Воеводского с отмеченной точкой $\mathbf{H}^\bullet(B)$ *[***MV***].*

Замечание 2. Вместо символа $X/(X-Z) \in \mathbf{H}^\bullet(B)$ следует рассматривать $X_+/(X_+ - Z)$, когда $X - Z$ не плотно в X.

Коль скоро мы говорим о классификации, то следует обсудить и импликацию в обратную сторону, а именно доказательство не изоморфизмов, т.е. утверждения в той или иной степени обратные к теореме 0.2 и следствию 0.4.

Утверждение 0.5. *Пусть B – это нетерова отделимая схема.*

Предположим, что есть изоморфизм $X_0/(X_0 - x_0) \simeq X_1/(X_1 - x_1)$ в $\mathbf{H}^\bullet(B)$, для каких-то $X_0, X_1 \in \mathrm{Sm}_B$ и замкнутых точек $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, тогда

$$\dim_B^{x_0} X_0 = \dim_B^{x_1} X_1 \in \mathbb{Z},$$

и

$$p_0(x_0) = p_1(x_1) \in B, \mathrm{sdeg}_{K_0} L_0 = \mathrm{sdeg}_{K_1} L_1, \tag{0.6}$$

где $p_0\colon X_0 \to B$, $p_1\colon X_1 \to B$ – структурные морфизмы, K_0 и L_0 – поля вычетов в $p_0(x_0)$ и x_0, тоже самое для K_1 и L_1.

Вторая часть исследования обобщает результаты о группах морфизмов, которые для совершенных базовых полей являются следствиями результатов [**MVW**].

Теорема 0.7. *Пусть $C \in \mathrm{Sm}_k$ такая, что $\dim_k C = 1$, и D – замкнутая приведенная нольмерная подсхема.*

Тогда имеет место квазиизоморфизм комплексов пучков Зарисского на Sm_k

$$\mathrm{Cor}(- \times_k \Delta_k^\bullet, C/(C-D))) \xrightarrow{\cong} k[- \times_k D]^\times, \tag{0.8}$$

где правая часть рассматривается как комплекс сосредоточенный в степени ноль. Для всякой $U \in \mathrm{Sm}_k$ имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(k)}(U, C/(C-D)[l]) \simeq \begin{cases} 0, & l \neq -1, 0, \\ \mathcal{O}(U \times D)^\times, & l = -1 \\ \mathrm{Pic}(U \times D), & l = 0. \end{cases} \tag{0.9}$$

Теорема 0.10. *Пусть $V_0 = \mathbb{A}_k^1 - z_0$, $V_1 = \mathbb{A}_k^1 - z_1$ для произвольных замкнутых точек z_0 и z_1. Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(k)}(V_0/\mathrm{pt}_k, V_1/\mathrm{pt}_k) \cong \mathrm{Cor}_k(z_0, z_1), \tag{0.11}$$

и $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(k)}(V_0/\mathrm{pt}_k, V_1/\mathrm{pt}_k[l]) = 0$ для $l \neq 0$.

Прямоугольные диаграммы слоений

И. А. Дынников, М. М. Чернавских

Определение 1. *Пачкой прямоугольников* называется упорядоченное семейство прямоугольников вида $r(t) = [\boldsymbol{\theta}_1(t); \boldsymbol{\theta}_2(t)] \times [\boldsymbol{\varphi}_1(t); \boldsymbol{\varphi}_2(t)]$, где непрерывные отображения $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2$ из $[0;1]$ в $\mathbb{S}^1$ обладают следующими свойствами:

(i) $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\varphi}_2$ строго возрастают,

(ii) $\boldsymbol{\theta}_2$ и $\boldsymbol{\varphi}_1$ строго убывают,

(iii) для всех $t \in [0;1]$ выполнено $\boldsymbol{\theta}_1(t) \neq \boldsymbol{\theta}_2(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_1(t) \neq \boldsymbol{\varphi}_2(t)$.

Определение 2. Пусть R — прямоугольная диаграмма зацепления. *Прямоугольной диаграммой слоения в дополнении к зацеплению* $\widehat{R}$ называется такой конечный набор пачек $\{P_1, \ldots, P_k\}$ прямоугольников, что:

1. любые две пачки P_i, P_j, $i \neq j$, попарно почти совместимы (см. рис.),

2. Диаграмма $\Pi_{\min}(\Xi)$ получается из диаграммы $\Pi_{\max}(\Xi)$ конечной последовательностью положительных флайпов, схлопываний/выдуваний пузырей, с последующим добавлением диаграммы трубки вокруг зацепления $\widehat{R}$ вида $\Omega_\varepsilon(R)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где через $\Pi_{\min}(\Xi)$ обозначается набор последних прямоугольников в каждой пачке $\{r_{\min}(P_i)\}_{i=1,\ldots,k}$, а через $\Pi_{\max}(\Xi)$ — набор последних прямоугольников каждой пачки $\{r_{\max}(P_i)\}_{i=1,\ldots,k}$

Определение 3. Коориентированное слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1 называется *тугим*, если существует замкнутая трансверсаль, пересекающая все слои $\mathcal{F}$.

Определение 4. Компактные слои слоения имеют *глубину* 0.

Слой F слоения $\mathscr{F}$ имеет *глубину* k, если $\bar{F} \setminus F$ есть объединение слоёв $< k$ и содержит хотя бы один слой глубины $k-1$.

Слоение $\mathscr{F}$ называется слоением конечной глубины, если все слои имеют глубину, меньшую некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 (W. P. Thurston)**.** *Пусть $L \subset \mathbb{S}^3$ — зацепление, а F — его поверхность Зейферта. Если существует тугое слоение на $M = \mathbb{S}^3 \setminus N(L)$ с компактным слоем $F \cap M$, то поверхность F имеет наименьший возможный род.*

Теорема 2 (1976; D. Gabai, 1983)**.** *Пусть $L \subset \mathbb{S}^3$ — произвольное неразводимое зацепление, а F — его поверхность Зейферта наименьшего рода. Тогда существует тугое слоение конечной глубины на $M = \mathbb{S}^3 \setminus N(L)$ с компактным слоем $F \cap M$.*

Теорема 3 (И. А. Дынников, М. Ч.)**.** *Любое тугое слоение конечной глубины в дополнении к неразводимому зацеплению может быть представлено прямоугольной диаграммой слоения.*

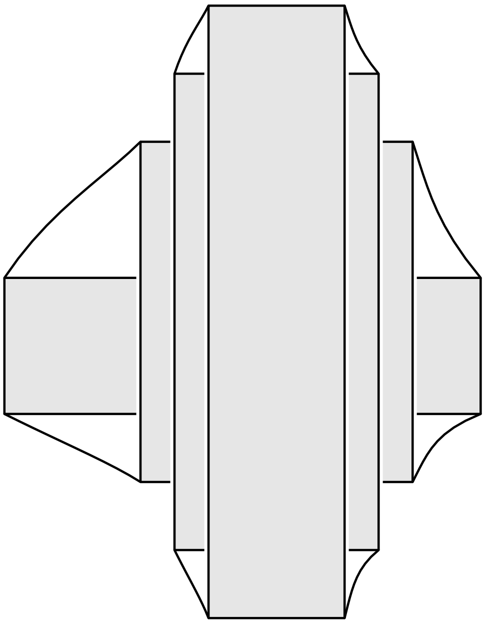

Рис. 1: Совместимые пачки прямоугольников

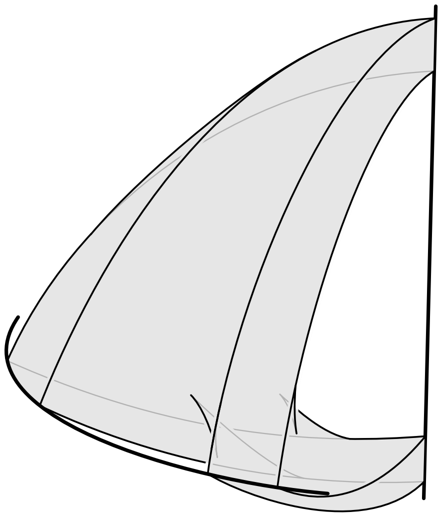

Рис. 3: Образ пачки прямоугольников в $\mathbb{S}^3$

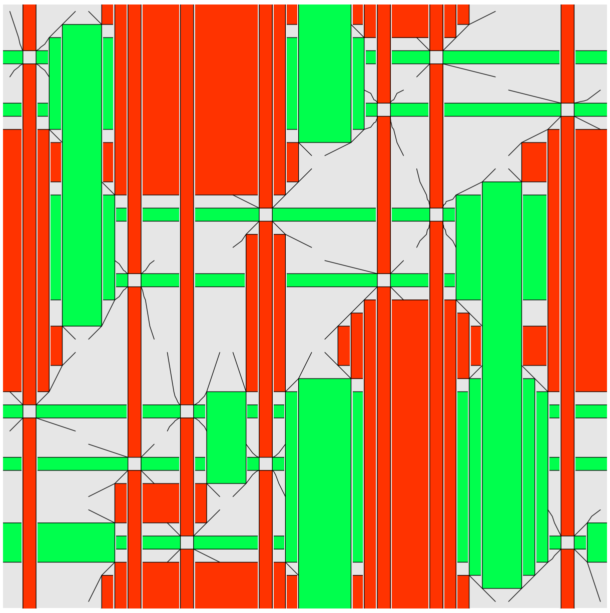

Рис. 2: Диаграмма слоения в дополнении к узлу 5_2 и диаграмма $\Pi_{\min}$

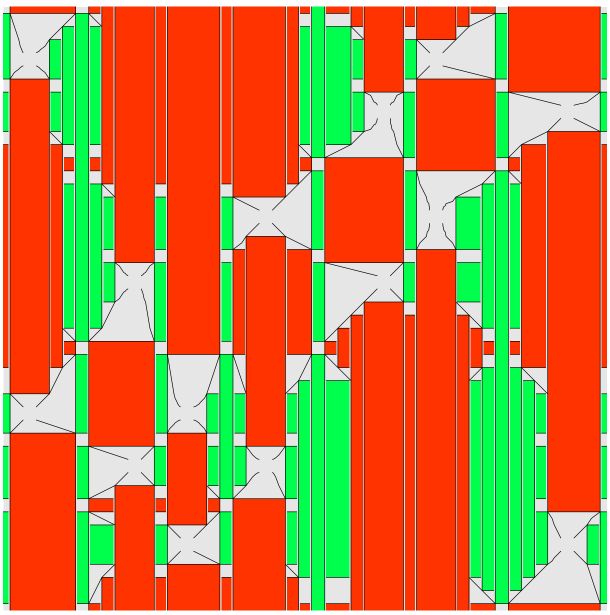

Рис. 4: Диаграмма $\Pi_{\max}$